× *Kout 1* + *Kout 6* – *Kout 4* =
÷ *[(* *Kout 1* + *Kout 2* *)]* =

Программа для вычисления Y_p:

ENT *Kout 4* × *Kout 2* + *Kout 6* × *Kout 1*
+ *Kout 3* – *Kout 5* = ÷ *[(*
Kout 1 + *Kout 2* *)]* =

Вычисленные значения X_p и Y_p читаем на дисплее калькулятора.

Перечисленные программы далеко не исчерпывают как возможности калькулятора, так и библиотеку разработанных авторами программ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Жмойдяк М.А., Медведев Б.А. Полевая практика по топографии с основами геодезии: Учеб. Пособие для геогр. спец.- Мн.: изд-во “Университетское”, 1987. - 237 с.

УДК 539.3

Веремейчик А.И.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

При исследовании напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов машин, механизмов и строительных конструкций, подвергающихся одновременному воздействию механических усилий и изменяющихся во времени температур, возникают дополнительные трудности из-за появления в разрешающих уравнениях времени как дополнительной независимой переменной. Один из подходов состоит в учете времени аналогично учету координат; при этом численное интегрирование производится по отрезку времени также как и по границе рассматриваемого тела. Однако этот метод значительно усложняет вычислительные операции. Для преодоления этих трудностей целесообразно применить интегральное преобразование Лапласа к исходным дифференциальным уравнениям в частных производных и краевым условиям задачи путем исключения времени из числа независимых переменных [1]. Использование данного подхода позволяет одинаково хорошо решать краевые задачи с различного рода начальными и граничными условиями благодаря значительному упрощению исходных уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (ДУ) несвязанной теплопроводности в общем виде [2]:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

где $T = T\left(p,t\right)$ - тепловое поле как функция координат произвольной точки p и времени t, $a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности, λ - коэффициент теплопроводности, ρ - плотность материала, c - удельная теплоемкость.

Используя свойство изображения производной для преобразования Лапласа, уравнение (1) перепишется в виде:

$$\nabla^2 T^* - \frac{s}{a}T^* + \frac{1}{a}T(p,0) = 0, \tag{2}$$

где $T^* = T^*(p,s)$ - трансформанта Лапласа температуры T как функция координат и параметра преобразования s (изображение функции T), $T(p,0)$ - функция начального распределения температуры. Если в начальный момент времени распределение температуры равно нулю, то выражение (2) упрощается:

$$\nabla^2 T^* - \frac{s}{a}T^* = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим двумерную задачу, т.е. случай, когда распространение тепла происходит в направлении 2-х осей координат, т.е. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ и

$$\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2}\right) - \frac{s}{a}T^* + \frac{T(p,0)}{a} = 0. \tag{4}$$

Решение этой задачи можно рассматривать как произведение решений для 2-х одномерных задач при соответствующих краевых условиях. Решение задачи при граничных условиях 1-го рода и постоянной температуре на границе области имеет вид:

$$\frac{T^*(p,s) - T_n}{T(p,0) - T_n} = \frac{T^*(x,s) - T_n}{T(x,0) - T_n} \cdot \frac{T^*(y,s) - T_n}{T(y,0) - T_n}, \tag{5}$$

где T_n - температура на поверхности, $T(x,0)$ и $T(y,0)$ - начальные условия.

Температурные поля $T^*(x,s)$ и $T^*(y,s)$ определяются решением ДУ для соответствующей одномерной краевой задачи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} - \frac{s}{a}T^* + \frac{T(x,0)}{a} = 0 \\ &\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} - \frac{s}{a}T^* + \frac{T(y,0)}{a} = 0 \end{aligned}. \tag{6}$$

Решение ДУ (6) в наиболее часто встречающемся в инженерной практике случае, т.е. при постоянном начальном распределении температуры, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T^*(x,s) &= \frac{T_0}{s} + Ash\sqrt{\frac{s}{a}}x + Bch\sqrt{\frac{s}{a}}x, \\ T^*(y,s) &= \frac{T_0}{s} + Csh\sqrt{\frac{s}{a}}y + Dch\sqrt{\frac{s}{a}}y, \end{aligned} \tag{7}$$

где $T_0 = T(x,0) = T(y,0) = T(p,0)$, A,B,C,D - постоянные, определяемые из граничных условий задачи.

Веремейчик Андрей Иванович. *Аспирант каф. сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.

Для данного случая, используя уравнение (5), получаем:

$$T^*(p,s)=T_n+\frac{1}{(\Delta T)^2}\Big[\big(T^*(x,s)-T_n\big)\big(T^*(y,s)-T_n\big)\Big] \tag{8}$$

где $\Delta T=T_0-T_n$.

Для заданных граничных условий можно определить неизвестные постоянные, входящие в уравнения (7). Затем, подставляя решения (7) в (8), определяется трансформанта Лапласа T^*. Для получения решения ДУ теплопроводности (1) достаточно применить формулы обращения преобразования Лапласа или специальные таблицы [2].

Рассмотренный подход является приемлемым только для решения простейших задач теплопроводности с линейными граничными условиями (ГУ). Для других случаев удобно применять методы теории потенциала. В соответствии с этими методами решение краевой задачи представляется интегралами от элементарных решений, которые называют фундаментальными решениями. Такой подход позволяет переходить от рассмотрения дифференциальных уравнений к интегральным, что делает такого рода решение более универсальным. Кроме того, интегральные уравнения лучше поддаются реализации на ЭВМ.

Рассмотрим решение задачи Дирихле с ГУ 1-го рода при нулевых начальных условиях. Для решения двумерной краевой задачи нестационарной теплопроводности вводится понятие потенциала двойного слоя

$$W(P,t)=\int_0^t a\,d\tau\int_L\frac{\partial T^*}{\partial n_y}\mu(P_0,\tau)dl, \tag{9}$$

где L - граница рассматриваемой области, P_0 - параметрическая точка, P - текущая точка, t - рассматриваемый момент времени, τ - начальный момент времени, $\mu(P_0,\tau)$ - плотность теплового потенциала, n_y - нормаль к рассматриваемой области L.

Для двумерного пространства фундаментальное решение уравнения теплопроводности имеет вид [2]

$$T^*(P,t,P_0,\tau)=\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}}\right]^3 e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}, \tag{10}$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ - расстояние между фиксированной и текущей точками.

Необходимо также учитывать, что при подходе к точкам границы области L тепловой потенциал двойного слоя $W(P,t)$ терпит разрыв:

$$W^+(P,t)=\frac{\mu(P,t)}{2}+W(P,t), \tag{11}$$

$$W^-(P,t)=-\frac{\mu(P,t)}{2}+W(P,t), \tag{12}$$

где W^+,W^- - предельные значения тепловых потенциалов при подходе вдоль нормали к поверхности соответственно изнутри и извне.

Дифференцируя выражение (10) по направлению нормали и учитывая формулы скачка (11,12), можно получить интегральное уравнение для определения плотности $\mu(P_0,\tau)$ потенциала двойного слоя при граничных условиях $F(P,t)$:

$$\pm\frac{1}{2}\mu(P,t)+2\pi\int_0^t\frac{d\tau}{\left(\sqrt{4\pi a(t-\tau)}\right)^{5/2}}\times$$
$$\times\int_L r\cos\varphi\, e^{\left(-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right)}\mu(P_0,\tau)dl=F(P,t) \tag{13}$$

Знак "+" применяется при решении внешней задачи, знак "-"- для внутренней задачи Дирихле.

Однако решение такого интегрального уравнения при сложной геометрии границы области оказывается очень громоздким. Применим для его решения теорему Эфоса интегрального преобразования Лапласа, в результате получим:

$$\pm\frac{1}{2}\mu(s,t)+2\pi r\cos\varphi\int_0^t\frac{\mu^*(\sqrt{s},\tau)}{\sqrt{s}}\frac{d\tau}{\left(\sqrt{4\pi a(t-\tau)}\right)^{5/2}}=F(s,t) \tag{14}$$

В данном случае $\frac{\mu^*(\sqrt{s},\tau)}{\sqrt{s}}$ является изображением функции $\mu(P_0,\tau)$. Граничные условия $F(s,t)$ здесь также являются функцией времени и параметра интегрирования.

Решая интегральное уравнение (14), определяется изображение функции как зависимость от s и τ. Затем с помощью обращения преобразования Лапласа можно определить плотность потенциала $\mu(P_0,\tau)$ как функцию координат и времени, что позволит определить распределение температуры в любой точке области. Возможно использование способов обращения, предложенных в [3].

Рассмотрение задачи Неймана с ГУ 2-го рода или задач со смешанными ГУ проводится аналогично. Отличие при рассмотрении дифференциального уравнения заключается в записи выражения (5). При использовании метода потенциала для решения задачи Неймана используется потенциал простого слоя с плотностью $\nu(P_0,\tau)$

$$V(P,t)=\int_0^t a\,d\tau\int_L T^*\nu(P_0,\tau)dl, \tag{15}$$

для решения смешанной краевой задачи рассматривается сумма потенциалов простого и двойного слоя. В конечном итоге это приводит к изменению ядра интегрального уравнения (13).

Если имеет место ненулевое начальное решение температуры, то следует использовать интеграл Пуассона [4].

Полученное при решении задачи теплопроводности распределение теплового поля используется в дальнейшем как одно из исходных данных для решения задачи термоупругости.

Разработан алгоритм численного решения поставленной задачи, вычисление интегралов производится с помощью квадратурных формул Гаусса. При этом точность полученных результатов выше, чем при использовании других численных методов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1967.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.
3. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. Под ред. Т. Круза и Ф. Риццо. - М.: Мир, 1978.
4. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1978.

УДК 532.135

Босяков С.М.

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ПОЛУМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

Решения волновых уравнений в виде плоских волн имеют большое значение, так как отражают наиболее характерные свойства колебательных процессов. Ниже предлагается анализ волновых явлений в вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений с позиции теории плоских волн.

В случаях, когда можно пренебречь диссипацией энергии и считать, что движения происходят с малыми скоростями, система уравнений для анализа волновых процессов в микрополярной жидкой среде, при условии равенства поворота локального трехгранника среднему повороту поля перемещений, примет вид [1]:

$$\mu\Delta\vec{v} + \left(\lambda + \frac{\mu}{3}\right) graddiv\vec{v} + $$

$$+\frac{1}{4}(\gamma+\beta) rotrot\Delta\vec{v} - gradp = \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho div\vec{v} = 0.$$

Здесь $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ - вектор скорости, λ, μ - объемная и сдвиговая вязкости, γ, β - коэффициенты вращательной вязкости [2,3], p - давление, ρ - плотность среды, Δ - оператор Лапласа, массовые силы отсутствуют.

Известно, что векторное поле можно представить в виде суммы потенциальной и вихревой компонент [4,5]:

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_L = grad\varphi + rot\vec{A}, \qquad (2)$$

где $\varphi, \vec{A}$ скалярный и векторный потенциалы. Также отметим, что в (2) компонента $\vec{v}_L = grad\varphi$ описывает продольные (звуковые) волны, $\vec{v}_T = rot\vec{A}$ - поперечные (сдвиговые) волны.

Для продольных колебаний система (1) приводится к известному волновому уравнению [5]:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vec{v}_L + \rho\frac{\partial p}{\partial\rho}\Delta\vec{v}_L - \rho\frac{\partial^2\vec{v}_L}{\partial t^2} = 0, rotv_L = 0. \qquad (3)$$

Если искать решение уравнения (3) в виде плоской гармонической волны $\vec{v}_T = \vec{n}A(x)exp(-i\omega t)$, то дисперсионное соотношение примет вид [5]:

$$k \approx \frac{\omega}{c_0}\left(1 + i\frac{b\omega}{2c_0^2\rho}\right) = k' + ik'', \qquad (4)$$

где $c_0 = \frac{\partial p}{\partial\rho}$, $b = \lambda + \frac{4\mu}{3}$, ω - частота, k - волновое число, i - мнимая единица. Используя выражение (4), получим решение уравнения (3) в виде:

$$\vec{v}_l = \vec{n}A_1 exp(-k''x)exp\left(-i\omega\left(t - \frac{\lambda}{c_0}\right)\right) +$$

$$+\vec{n}A_2 exp(k''x)exp\left(-i\omega\left(t + \frac{\lambda}{c_0}\right)\right).$$

Это решение представляет собой совокупность двух встречных плоских гармонических волн, амплитуды которых убывают по мере распространения ($\vec{n}$ -нормаль к волновой поверхности). Здесь коэффициент затухания $k'' = \frac{\omega^2 b}{2\rho c_0^3}$ [5].

Для сдвиговых колебаний из уравнения неразрывности следует $\frac{\partial p}{\partial\rho} = 0$, то есть жидкость можно рассматривать как несжимаемую ($\rho = const$). Тогда из (1) получим

$$\mu\Delta\vec{v}_T + \frac{1}{4}(\gamma+\beta) rotrot\Delta\vec{v}_T = \rho\frac{\partial\vec{v}_T}{\partial t}, \quad div\vec{v}_T = 0. \qquad (5)$$

Учитывая, что $rotrot\Delta\vec{v}_t = graddiv\Delta\vec{v}_t - \Delta^2\vec{v}_t$, из системы (5) будем иметь:

$$\mu\Delta\vec{v}_T - \frac{1}{4}(\gamma+\beta)\Delta^2\vec{v}_T = \rho\frac{\partial\vec{v}_T}{\partial t}, \ div\vec{v}_T = 0. \qquad (6)$$

Будем считать, что поперечные волны в жидкости возбуждаются колеблющейся стенкой так, что твёрдая поверхность, совпадающая с плоскостью yz декартовой системы координат, совершает движение вдоль оси y. Значит, для величины $\vec{v}_t = \{v_x, v_y, v_z\}$ отлична от нуля только компонента v_y и решение (6) ищем в виде

$$v_y = v_0 exp(-i(\omega t - kx)). \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), найдём закон дисперсии (связь между волновым числом κ и частотой ω):

$$\mu k^2 + \frac{1}{4}(\gamma+\beta)k^4 = \rho\omega i, \qquad (8)$$

или

Босяков Сергей Михайлович. *Ассистент каф. СМиТМ Брестского государственного технического университета. Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.*